## 37. 函数ノ orthogonal function system ニヨル展開ニ付テ

高橋龍雄(東北大)

Haarガソノ有名ナ Dissertation (Math. Ann. 61, 1912.) ノ中デハ函数ノ orthogonal function system ニヨル展開ニ関シ次ノ定理ヲ証明シテヰル。

I. $(\varphi_i(s))$ ヲ $[0, 1]$ デ integrable ナ orthogonal function system トシ $a$ ヲ $[0, 1]$ ノ一点トスル。

$$K_n(a, s) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(a)\varphi_i(s), \quad \omega_n = \int_0^1 |K_n(a,s)|\,ds$$

トシク。若シ $(\omega_n)$ ガ bounded デナケレバ一ツノ continuous funct $f(s)$ ガ存在シテ夫ノ $(\varphi_i(s))$ ニヨル Fourier Series ガ $s=a$ デ diverge スル。

II. 全テノ continuous function ガ其ノ orthogonal function system $(\varphi_i(s))$ デ uniformly approximable デ $(\omega_n)$ ガ bounded ナラバ全テノ continuous functions ノ Fourier series ハ $s=a$ デ converge スル。

(コノ種ノ定理ニ関シテハ H. Hahn, Über Folgen linearer Operationen, Monatsheft f. Math. und Physik, 32, 1922; H. Steinhaus, Sur les développements orthogonaux, Bull. Acad. Cracovie, A, 1926 等参照)

今之等ノ定理ヲBanachノlinear operationsノtheory=於ケル簡単ナ定理ヨリ導キ，合セテ上ノ結論ノ様ナcontinuous functionガ実際ドノ位多クアルカヲ験ベテミヨウ。ココデ使フ定理トイフノハ次ノ三ツデアル。

(α) $(u_n(x))$ヲtype(B)ノspaceデ定義サレタlinear functionals（functionalトハヘバソノcontra-domainガ実数全体ヨリナルspaceデアル）ノsequenceトスル。若シ $\overline{\lim_{n\to\infty}}\|u_n(x)\|$ ガ2nd categoryノsetデfiniteトスルト $\|u_n\|<M$ ナルMガアル（n＝independentナM）

(β) linear functionalノsequence $(u_n(x))$ ガtype(B)ノspace EノーツノsphereKデdenseナsetデconvergeシ $\|u_n\|<M$ ナル $M(n=\text{independent})$ ガアレバ $(u_n(x))$ ハspaceノ全テノ点デconvergeスル。

(γ) continuous functionsノspace (C)デ定義サレタ全テノlinear functionalハ

$$u(x)=\int_0^1 x(s)\,dg(s) \qquad \text{(Riemann-Stieltjes積分)}$$

トカケル。ココニ $g(s)$ ハ $x(s)$ ニハindependentナbounded variationノ函数デ $\|u\|=\int_0^1|dg(s)|$ デアル。

術語ハ全テBanach: Théorie des opérations linéaires，ニヨル。(α)，(β)ハBanach-Steinhaus, Sur les principe de la condensation de singularités, Fund. Math. 9 (1927) 中ノLemma 2, 3デ(γ)ハF. Rieszニ負フモノデアル。

先ヅIIヲ証明スル。今

$$u_n(x)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(a)\int_0^1 x(s)\varphi_i(s)\,ds=\int_0^1 x(s)K_n(a,s)\,ds$$

トスルト明カニ $u_n(x)$ ハ (C) デ linear デアル。且假定ニヨリ $\varphi_i(s)$ ノ linear combinations $\sum_{i=1}^{n}c_{in}\varphi_i(s)$ ; $c_{in}$ ハ constant, ハ (C) デ dense デ之ノ $(\varphi_i(s))$ ニヨル Fourier series ハ converge スルコトハ明デアル。又 $(\gamma)$ ニヨリ

$$\int_0^1 x(s)\,dg_n(s)=\int_0^1 x(s)K_n(a,s)\,ds=\int_0^1 x(s)\,d\left(\int_0^s K_n(a,v)\,dv\right)$$

ナル如キ bounded variation ノ函数 $g_n(s)$ ガアル。而モコノ関係ハ全テノ continuous function $x(s)$ ニツイテ成立スルカラ

$$g_n(s)=\text{const.}+\int_0^s K_n(a,v)\,dv \quad (\text{const. ハ } n \text{ ニ depend スルカモシレナイ})$$

故ニ $\int_0^1|K_n(a,s)|\,ds<M$ ナラバ $\|u_n\|=\int_0^1|dg_n(s)|<M'$ ナル $M'$ ガアル。何者、const. ノ totalisation ハ zero デアルカラ。故ニ $(\beta)$ ニヨリ II ガ証明サレタ。

次ニ I ヲ証明シヨウ。II ノトキト同ジ notation ヲ用ヒル。若シ全テノ continuous functions ノ Fourier series ガ $s=a$ デ converge スレバ $\overline{\lim}_{n\to\infty} u_n(x)$ ガ各々ノ $x$ ニ付テ finite デアル。故ニ $(\alpha)$ ニヨリ $\|u_n\|<M$ デアル。即チ $\int_0^1|K_n(a,s)|\,ds<M'$ トナル。之ハ矛盾(假定ニ)デアル。之デ I ガ証明サレタ。

コノ証明デ (C) ノ中ノ second category set ノ函数ノ Fourier series ガ converge スルトシテモ同様ノ結論ニナル。故ニ Fourier series ガ converge スル様ノ continuous functions $\int_0^1|K_n(a,s)|\,ds<M$ ガ成立シナイ限リ 2nd category set ヲ作リ得ナイ。故ニ次ノ定理ガ得ラレル。

III. モシ ($\omega_n$) ガ bounded デナケレバ $s=a$ デ ($\varphi_i(s)$) ニヨル Fourier series ガ diverge スル様ナ continuous functions ハ (C) ノ中デ 2nd category ノ set ヲ作ル。

尚同様ノ考ヘデ次ノ定理ガ得ラレル。

I'. ($\varphi_i(s)$) ヲ $L^\beta$ ($\beta>1$) ニ属スル函数ノ orthogonal system トスル。$K_n(a,s)$ ハ I ト同様ニ定義スル。

$$\bar{\omega}_n = \left(\int_0^1 |K_n(a,s)|^\beta ds\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

トシタトキ モシ ($\bar{\omega}_n$) ガ bounded デナケレバ $s=a$ デ ($\varphi_i(s)$) ニヨル Fourier series ガ diverge スル如キ $L^\alpha$ ($\alpha>1$, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$) ニ属スル函数ハ ($L^\alpha$) ノ space デ 2nd category ノ set ヲ作ル。

II'. モシ全テノ $L^\alpha$ ニ属スル函数ガ ($\varphi_i(s)$) デ $\alpha$-th mean ニ於テ approximable ($\beta \geqq \alpha$ トスル) デ且 ($\bar{\omega}_n$) ガ bounded ナラバ全テノ $L^\alpha$ ニ属スル函数ノ Fourier series ハ $s=a$ デ converge スル。 (9.9.19 受取)